

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

ПО КУРСУ "ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ"

6-й курс (3-й поток) и 341 гр
лектор доцент Фуругян М.Г.

- Доказать, что $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y)$.
- Для функции $K(x, y) = 1 - (x - y)^2$, определенной на множествах $X = Y = [0, 1]$, вычислить $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y)$ и $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y)$.
- Выписать платежную функцию для антагонистической игры типа "бесшумная дуэль" и (3 курс) найти чистые оптимальные гарантирующие стратегии игроков для случая, когда функции меткости $p(x) = x$, $q(y) = y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
- Выписать платежную функцию для антагонистической игры типа "шумная дуэль" и (3 курс) найти чистые оптимальные гарантирующие стратегии игроков для случая, когда функции меткости $p(x) = x$, $q(y) = y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
- Выписать платежную функцию для антагонистической "игры с выбором момента времени" и найти смешанные оптимальные гарантирующие стратегии игроков.
- Понятие седловой точки. Необходимые и достаточные условия существования седловой точки в чистых стратегиях в антагонистической игре.
- Теорема Фон Неймана о существовании седловой точки у вогнуто-выпуклых функций.
- Доказать, что функция $K(x, y) = y \ln(x+2) + xy^2$, определенная на множествах $X=Y=[0, 1]$, имеет седловую точку.
- Необходимые условия для седловой точки у функции $K(x, y)$, определенной на множествах $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, $c_j \leq y_j \leq d_j$, $j = 1, \dots, m$.
- Найти седловую точку функции $K(x, y) = 8(4xy^2 - 2x^2 - y)$, определенной на множествах $X = Y = [0, 1]$.
- Смешанные стратегии в матричных антагонистических играх. Существование седловой точки в смешанных стратегиях.
- Свойства оптимальных смешанных стратегий в матричных антагонистических играх.
(Доказательство 3 курс)
- Доминирование строк и столбцов в матричных антагонистических играх.
(Доказательство 3 курс)
- Графический способ решения матричных антагонистических игр $2 \times m$ и $n \times 2$.
- Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Найти решение в смешанных стратегиях в антагонистической игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

20. Итеративный метод Брауна решения матричных антагонистических игр.
21. Вычисление простых решений матричных антагонистических игр. Вполне смешанные игры.
22. Необходимые и достаточные условия для крайних оптимальных смешанных стратегий в матричной антагонистической игре.
23. Найти все крайние оптимальные смешанные стратегии в антагонистической игре с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
24. Доказать, что множества оптимальных смешанных стратегий игроков в матричной антагонистической игре являются выпуклыми многогранниками.
25. Связь между существованием решения задачи линейного программирования в стандартной форме и седловой точкой функции Лагранжа. **(Доказательство 3 курс)**
26. Сведение решения конечной антагонистической игры к задаче линейного программирования.
27. Оптимальные смешанные стратегии в бесконечных антагонистических играх. Существование седловой точки в смешанных стратегиях в играх с непрерывной платежной функцией.
28. Бескоалиционные игры. Необходимые и достаточные условия для ситуации равновесия.
29. Принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера в задачах распределения ресурсов. **(Доказательство 3 курс)**
30. Модель Гросса "Оборона - нападение".
31. **(3 курс)** Найти $\max_{\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i W_i$, где $W_i > 0 (i = 1, \dots, n)$.
32. Потоки в сетях. Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока в сети.
33. **(3 курс)** Привести пример, когда алгоритм Форда-Фалкерсона не находит максимального потока.
34. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе в сетях.
35. Алгоритм Карзанова нахождения максимального потока в сети.
36. С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найти максимальный поток из s в t в сети с дугами $(s, 1), (s, 2), (s, 3), (1, 2), (1, t), (2, 3), (2, t), (3, t)$, пропускные способности которых равны 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 2 соответственно.
37. С помощью алгоритма Карзанова найти максимальный поток из s в t в сети с дугами $(s, 1), (s, 2), (s, 3), (1, 2), (1, t), (2, 3), (2, t), (3, t)$, пропускные способности которых равны 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 2 соответственно.
38. Задача о потоке минимальной стоимости в сети.
39. Сведение к задаче о потоке минимальной стоимости в сети транспортной задачи, задачи о назначениях, задачи о максимальном потоке, задач о кратчайшем и самом длинном путях, задачи составления графика выполнения заданий с жесткими директивными интервалами, задачи о паросочетаниях.
40. Построение допустимого расписания с прерываниями для многопроцессорной системы при заданных длительностях работ и директивных интервалах. **(Доказательство 3 курс)**
41. Путем сведения задачи построения допустимого расписания к задаче о максимальном потоке в сети построить допустимое расписание (с прерываниями) выполнения трех заданий на двух одинаковых процессорах. Директивные интервалы и длительности заданий следующие:
 $[b_1, f_1] = [0, 6], [b_2, f_2] = [0, 3], [b_3, f_3] = [1, 6], t_1 = 5, t_2 = 3, t_3 = 4$.
42. **(3 курс)** Алгоритм Коффмана построения допустимого расписания с прерываниями для однопроцессорной системы при заданных длительностях работ и директивных интервалах.
43. Семь основных NP-полных задач.
44. Доказать NP-полноту задачи "расписание для мультипроцессорной системы без прерываний" [Задано конечное множество заданий N и для каждого $i \in N$ длительность t_i и общий директивный срок T . Существует ли m -процессорное расписание без прерываний, при котором все задания завершатся не позднее срока T ?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.
45. Доказать NP-полноту задачи "упорядочение внутри интервалов" [Задано конечное множество заданий N и для каждого $i \in N$ длительность t_i и директивный интервал $(b_i, f_i]$. Существует ли однопроцессорное расписание без прерываний, такое, что каждое задание полностью выполняется в своем директивном интервале?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

46. **(3 курс)** Доказать NP-полноту задачи "упорядочение с минимальным запаздыванием" [Задано конечное множество заданий N , для каждого $i \in N$ длительность $t_i=1$ и директивный интервал $(0, f_i]$, граф частичного порядка $G=(N,A)$ и число K . Существует ли однопроцессорное расписание без прерываний, при котором число заданий, не выполненных к своему директивному сроку, не превосходит K ?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

47. Доказать NP-полноту задачи "Самый длинный путь" [Заданы граф $G = (V, E)$ и число $K \leq |V|$. Имеется ли в G простой путь (т.е. путь, не проходящий дважды ни через одну вершину), состоящий не менее чем из K ребер?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

48. Доказать NP-полноту задачи "Наибольший общий подграф" [Заданы два графа $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ и число K . Существуют ли такие подмножества $E'_1 \subseteq E_1$ и $E'_2 \subseteq E_2$, что $|E'_1| = |E'_2| \geq K$, а подграфы $G'_1=(V_1, E'_1)$ и $G'_2 = (V_2, E'_2)$ изоморфны?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

49. Доказать NP-полноту задачи "Доминирующее множество" [Заданы граф $G = (V, E)$ и число K , $K \leq |V|$. Существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \leq K$ и каждая вершина $v \in V \setminus V'$ соединена ребром по крайней мере с одной вершиной из V' ?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

50. Доказать NP-полноту задачи "Минимум суммы квадратов" [Заданы конечное множество N , размер s_i для каждого $i \in N$ и числа K и J . Могут ли элементы из N быть разбиты на K непересекающихся

множеств $N_1, \dots, N_K$, таких, что $\sum_{j=1}^K (\sum_{i \in N_j} s_i)^2 \leq J$?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-

полных задач.

51. Доказать NP-полноту задачи "Минимизация веса невыполненных заданий" [Заданы конечное множество N заданий, число K , а также для каждого задания $i \in N$ длительность t_i , вес w_i и директивный срок f_i . Существует ли однопроцессорное расписание (без прерываний) τ для заданий из N , такое, что

$\sum_{i: \tau_i + t_i > f_i} w_i < K$, где τ_i - момент начала выполнения задания $i \in N$?] путем сведения к ней одной из семи

основных NP-полных задач.

52. Доказать NP-полноту задачи "Упаковка в контейнеры" [Заданы конечное множество N предметов, размер s_i каждого предмета $i \in N$, вместимость B контейнера и число K . Существует ли такое разбиение множества N на непересекающиеся подмножества $N_1, \dots, N_K$, что $\sum_{i \in N_j} s_i \leq B$ для всех $j=1, \dots, K$?] путем

сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

53. Доказать NP-полноту задачи "Интеграл от произведения косинусов" [Задана последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Верно ли, что

$$\int_0^{2\pi} \left(\prod_{i=1}^n \cos(a_i x) \right) dx \neq 0 ?]$$

путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

54. Доказать NP-полноту задачи "Множество представителей" [Заданы конечное множество элементов N , семейство $C_1, \dots, C_m$ конечных подмножеств множества N и число K . Существует ли такое подмножество $S \subseteq N$, что $|S| \leq K$ и S содержит по крайней мере по одному элементу из каждого множества C_j ($j = 1, \dots, m$)?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

55. Доказать NP-полноту задачи "Изоморфизм подграфу" [Заданы два графа G_1 и G_2 . Изоморфен ли граф G_1 некоторому подграфу графа G_2 ?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

56. Доказать NP-полноту задачи "Независимое множество" [Заданы граф $G = (V, E)$ и число $K \leq |V|$. Существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \geq K$ и для каждой пары $i, j \in V$ ($i, j \notin E$)?] путем сведения к ней одной из семи основных NP-полных задач.

57. Задачи с числовыми параметрами. Псевдополиномиальный алгоритм решения "задачи о разбиении".

58. Псевдополиномиальный алгоритм решения "задачи о рюкзаке".

59. **(3 курс)** Псевдополиномиальный алгоритм решения задачи "расписание для многопроцессорной системы без прерываний с фиксированным числом процессоров".

60. NP-полнота в сильном смысле. Псевдополиномиальная сводимость. Методы доказательства сильной NP-полноты.

61. Доказать, что задача "упорядочение внутри интервалов" является NP-полной в сильном смысле.

62. Доказать, что задача "многопроцессорное расписание без прерываний" является NP-полной в сильном смысле.

63. Доказать, что задача коммивояжера является NP - полной в сильном смысле.
64. Доказать, что задача "упаковка в контейнеры" является NP - полной в сильном смысле.
65. Сводимость по Тьюрингу. NP -трудные задачи.
66. **(3 курс)** Доказать, что задача " K -е по порядку множество" является NP -трудной.
67. Доказать, что задача нахождения 3-сочетания является NP - трудной и NP -легкой.
68. Доказать, что задача нахождения минимального вершинного покрытия в графе является NP -трудной и NP -легкой.
69. Доказать, что задача нахождения максимальной клики в графе является NP - трудной и NP -легкой.
70. Доказать, что задача нахождения гамильтонова цикла в графе является NP - трудной и NP -легкой.
71. Доказать, что задача нахождения выполняющего набора значений переменных для набора дизъюнкций является NP - трудной и NP -легкой.
72. Доказать, что оптимизационная задача коммивояжера является NP - трудной и NP -легкой.
73. Приближенный полиномиальный алгоритм A решения задачи "упаковка в контейнеры" с оценкой $R_A < 2$.
74. **(3 курс)** Приближенный полиномиальный алгоритм A решения задачи коммивояжера с оценкой $R_A < 2$.
75. **(3 курс)** Приближенный полиномиальный алгоритм A решения задачи коммивояжера с оценкой $R_A < 1,5$.
76. Приближенный полиномиальный алгоритм A решения задачи "многопроцессорное расписание без прерываний" с оценкой $R_A < 2$.
77. **(3 курс)** Приближенный полиномиальный алгоритм A решения задачи "вершинное покрытие" с оценкой $R_A < 2$.
78. **(3 курс)** Приближенный алгоритм решения задачи о рюкзаке с временной сложностью $O(n^3/\epsilon)$.
79. Доказать, что если $P \neq NP$, то не существует полиномиального приближенного алгоритма A решения задачи о рюкзаке с оценкой $|A(I) - OPT(I)| \leq K$.
80. Доказать, что если $P \neq NP$, то не существует полиномиального приближенного алгоритма A решения задачи о минимальном вершинном покрытии с оценкой $|A(I) - OPT(I)| \leq K$.
81. Доказать, что если $P \neq NP$, то не существует полиномиального приближенного алгоритма A решения задачи коммивояжера с оценкой $A(I)/OPT(I) \leq K$.
82. Метод "ветвей и границ" для решения задачи "многопроцессорное расписание без прерываний".